Teorem: Eğer V, boyutu sıfırdan büyük bir n boyutlu vektör uzayı ise

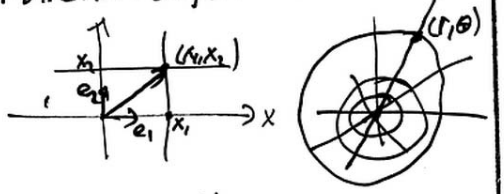
i) Elemanlarının sayısı n'den küçük vektör kümesi V'yi geremez.

ii) Elemanlarının sayısı n'den küçük lineer bağımsız vektörler kümesi V'nin bir bazı olması için genişletilebilir.

iii) Elemanlarının sayısı n'den büyük V'yi geren vektörler kümesi V'nin bir bazı olması için indirgenebilir.

BAZ DEĞİŞİMİ

$\mathbb{R}^2$'de koordinatları değiştirmek:



$\mathbb{R}^2$'nin doğal (standart) bazı $\{e_1, e_2\}$ dir. $\mathbb{R}^2$'deki keyfi x vektörü e_1 ve e_2 vektörlerinin lineer birleşimi olarak $x = x_1e_1 + x_2e_2$ tek türlü yazılır.

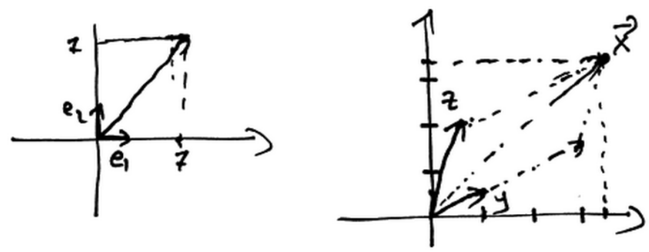
x_1, x_2'ye x'in doğal baza göre koordinatları denir. $\{y, z\}$, $\mathbb{R}^2$'nin başka bir bazı olsun. Buna göre $x = \alpha y + \beta z$ tek türlü yazılır. Sıralı bazı $[y, z]$ ile gösterelim. $[y,z]$ sıralı bazına göre x'in koordinat vektörü $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ dır.

Örk: $y = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $z=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ olsun. $x = \begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(y, z lineer bağımsız ve $\mathbb{R}^2$'yi gerdiğinden bazdır) $[y,z]$ sıralı bazına göre x'in koordinat vektörü nedir?

$x = \alpha y + \beta z$ $\qquad \begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

x'in koordinat vektörü $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ dir. x'in doğal baza göre koordinat vektörü $\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}$ dır. $\left(x = 7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$



$\mathbb{R}^2$ için $\{e_1,e_2\}$ doğal bazı yerine $u_1 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ $u_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ bazını kullanarak,

1) verilen $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ vektörünün yeni baz $[u_1, u_2]$'ye göre koordinatlarını,

2) verilen $c_1u_1 + c_2u_2$ vektörünün $[e_1,e_2]$ ~~koordinatlarına~~ bazına göre koordinatlarını bulalım.

Önce (2)'den başlayalım.

$u_1 = 3e_1 + 2e_2$ ve $u_2 = e_1 + e_2$

$c_1u_1 + c_2u_2 = c_1(3e_1+2e_2) + c_2(e_1+e_2) = (3c_1+c_2)e_1 + (2c_1+c_2)e_2$

$c_1u_1+c_2u_2$'nin $[e_1,e_2]$'ye göre koordinat vektörü $\begin{bmatrix}3c_1+c_2\\2c_1+c_1\end{bmatrix}$ dir.

$$x = \begin{bmatrix}3c_1+c_2\\2c_1+c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

$U = \begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$ dersek $[u_1,u_2]$ bazına göre koordinat vektörü $c = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ olarak verilen bir vektörün $[e_1,e_2]$ bazına göre koordinat vektörü $x = Uc$ dir.

U'ya $[u_1,u_2]$ bazından $[e_1,e_2]$ bazına geçiş matrisi denir.

(1)'i yapmamız için $[e_1,e_2]$'den $[u_1,u_2]$'ye geçiş matrisini bulmamız gerekir. u_1, u_2 lineer bağımsız olduğu için U singüler değildir.

Buna göre $c = U^{-1}x$ olur.

Örk: 1) $u_1 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$

$[u_1,u_2]$'ye göre x'in koordinatlarını bulunuz.

$[u_1,u_2]$'den $[e_1,e_2]$'ye geçiş matrisi

$U = \begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$ dir. $\qquad c = U^{-1}x \qquad x = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$

$U^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix}$ $\qquad c = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

2. yol: $\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\qquad c = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

2) $v_1 = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ ve $u_1 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ olmak üzere $[v_1,v_2]$ bazından $[u_1,u_2]$'ye geçiş matrisini bulunuz.

$v_1 = s_{11}u_1 + s_{21}u_2$ $\qquad U = \begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{bmatrix}$

$v_2 = s_{12}u_1 + s_{22}u_2$

$$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = s_{11}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + s_{21}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$3s_{11}+s_{21}=5$ $\qquad \left[\begin{array}{cc|c}3&1&5\\2&1&2\end{array}\right]$

$2s_{11}+s_{21}=2$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c}3&1&5&7\\2&1&2&3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c|c}3&1&5&7\\0&1/3&-4/3&-5/3\end{array}\right]$$

$\frac{1}{3}s_{21}=-\frac{4}{3} \Rightarrow s_{21}=-4$

$3s_{11}+s_{21}=5 \Rightarrow s_{11}=3$

$\frac{1}{3}s_{22}=-\frac{5}{3} \Rightarrow s_{22}=-5$

$3s_{12}+s_{22}=7 \Rightarrow s_{12}=4$

$$U = \begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&4\\-4&-5\end{bmatrix}$$

Genel Vektör Uzaylarında Baz Değişimi

Tanım: V bir vektör uzayı ve $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ V'nin bir sıralı bazı olsun. V'nin herhangi bir $v\in V$ vektörü $c_1,c_2,\dots,c_n$'ler skalerler olmak üzere

$$v = c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n$$

formunda tek türlü yazılabildiğinden, her $v\in V$ vektörüne karşılık $\mathbb{R}^n$'de

yalnız bir $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)^T$ vektörü karşılık getirebiliriz. Bu yolla tanımlanan c vektörüne, E sıralı bazına göre v'nin koordinat vektörü denir ve $[v]_E$ ile gösterilir. c_i'lere E'ye göre v'nin koordinatları denir.

V n-boyutlu vektör uzayı $E=[w_1,w_2,\dots,w_n]$ ve $F=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ iki sıralı baz olsun. Keyfi $v\in V$ için $x=[v]_E$ ve $y=[v]_F$ olsun. x ve y arasındaki bağıntı ve E'den F'ye

geçiş matrisini bulalım.

$w_1 = s_{11}v_1+s_{21}v_2+\dots+s_{n1}v_n$

$w_2 = s_{12}v_1+s_{22}v_2+\dots+s_{n2}v_n$

$\vdots$

$w_n = s_{1n}v_1+s_{2n}v_2+\dots+s_{nn}v_n$

$x=[v]_E \Rightarrow v = x_1w_1+x_2w_2+\dots+x_nw_n$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n} s_{1j}x_j\right)v_1+\left(\sum_{j=1}^{n} s_{2j}x_j\right)v_2+\dots+\left(\sum_{j=1}^{n} s_{nj}x_j\right)v_n$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$S=\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&\cdots&s_{1n}\\ s_{21}&s_{22}&\cdots&s_{2n}\\ s_{n1}&s_{n2}&\cdots&s_{nn}\end{bmatrix}$$

$$y=Sx \qquad \left([v]_F = S[v]_E\right)$$

S'ye E'den F'ye geçiş matrisi denir. $y=0$ aldığımızda $Sx=0$ homojen sisteminin yalnız aşikar çözümü olduğundan S singüler değildir. ($y=0$ $\Rightarrow x_1w_1+x_2w_2+\dots+x_nw_n=0$ E lineer bağımsız olduğundan $x_1=x_2=\dots=x_n=0 \Rightarrow x=0$)

Örk: 1) $v_1=\begin{bmatrix}4\\6\\7\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ ve

$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ olsun

a) $[v_1,v_2,v_3]$'den $[u_1,u_2,u_3]$'e geçiş matrisini bulunuz.

b) $x=2v_1+3v_2-4v_3$ ile $[u_1,u_2,u_3]$'e göre x'in koordinatlarını belirleyiniz.

a) $v_1 = s_{11}u_1+s_{21}u_2+s_{31}u_3$

$v_2 = s_{12}u_1+s_{22}u_2+s_{32}u_3$

$v_3 = s_{13}u_1+s_{23}u_2+s_{33}u_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&1&2&4&0&0\\1&2&3&6&1&1\\1&2&4&7&1&2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&1&2&4&0&0\\0&1&1&2&1&1\\0&1&2&3&1&2\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&1&2&4&0&0\\0&1&1&2&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right]$$

$s_{31}=1$

$s_{21}+s_{31}=2 \Rightarrow s_{21}=1$

$s_{11}+s_{21}+2s_{31}=4 \Rightarrow s_{11}=1$

$s_{32}=0$

$s_{22}+s_{32}=1 \Rightarrow s_{22}=1$

$s_{12}+s_{22}+2s_{32}=0 \Rightarrow s_{12}=-1$

$s_{33}=1$

$s_{23}+s_{33}=1 \Rightarrow$

$s_{23}=0$

$s_{13}+s_{23}+2s_{33}=0$

$s_{13}=-2$

$$S=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

b) $[x]_v=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$ $\qquad [x]_u=?$

$$[x]_u = S[x]_v = \begin{bmatrix}1&-1&-2\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7\\5\\-2\end{bmatrix}$$

171

2) P_3'te $[1, 2x, 4x^2-2]$ sıralı bazından $[1, x, x^2]$ sıralı bazına geçiş matrisini bulunuz. S^{-1}'i bularak $p(x) = 2x^2+4x+6$ vektörünün $[1, 2x, 4x^2-2]$ bazına göre koordinat vek. bul.

$$1 = 1.1 + 0.x + 0.x^2$$
$$2x = 0.1 + 2.x + 0.x^2$$
$$4x^2-2 = (-2).1 + 0.x + 4x^2$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

172

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right] \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$E = [1, 2x, 4x^2-2] \qquad F = [1, x, x^2]$

$$[p(x)]_F = S\,[p(x)]_E$$

$$[p(x)]_E = S^{-1}\,[p(x)]_F$$

173

$$[p(x)]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left(2x^2+4x+6 = 7.1 + 2(2x) + \tfrac{1}{2}(4x^2-2) \right)$$

174

SATIR UZAYI ve SÜTUN UZAYI

A, $m \times n$ tipinde bir matris ise A'nın her satırını $R^{1\times n}$ de bir vektör olarak düşünebiliriz. A'nın m tane satırına A'nın satır vektörleri denir. Benzer şekilde A'nın her sütununu $\mathbb{R}^m = R^{m\times 1}$'de bir vektör olarak düşünebiliriz. A'nın n tane sütununa A'nın sütun vektörleri denir.

175

Tanım: Eğer A, $m \times n$ tipinde bir matris ise A'nın satır vektörleri tarafından gerilen $R^{1\times n}$'nin alt uzayına A'nın satır uzayı denir. A'nın sütun vektörleri tarafından gerilen $\mathbb{R}^{m\times 1}$'nin alt uzayına da A'nın sütun uzayı denir.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ satır ve sütun uzayları?

$$\alpha[1\ 0\ 0] + \beta[0\ 1\ 0] = [\alpha\ \beta\ 0]$$

A'nın satır uzayı $\{[\alpha\ \beta\ 0] : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

176

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

A'nın sütun uzayı $\left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Teorem: Satırca denk iki matris aynı satır uzayına sahiptir.

Tanım: Bir A matrisinin satır uzayının boyutuna A'nın rankı denir.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

177

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha[1\ -2\ 3] + \beta[0\ -1\ -5]$$

A'nın satır uzayının bir bazı $\{[1\ -2\ 3], [0\ -1\ -5]\}$ dir. Boyutu 2 dir. A'nın rankı 2 dir.

178

Lineer Sistemler:

$$Ax = b$$

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

formunda yazılabilir.

Teorem: (lineer sistemler için kararlılık (tutarlılık) teoremi)
Bir $Ax=b$ lineer sisteminin kararlı olması için gerek ve yeter şart b'nin A'nın sütun uzayında olmasıdır.

Teorem: A, $m\times n$ tipinde matris olsun. $Ax=b$ lineer sisteminin her $b\in\mathbb{R}^m$ için tutarlı olması için gerek ve yeter şart A'nın sütun vektörlerinin $\mathbb{R}^m$'yi germesidir. $Ax=b$ lineer sisteminin her $b\in\mathbb{R}^m$ için en fazla bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart A'nın sütun vektörlerinin lineer bağımsız olmasıdır.

Teorem: Bir $n\times n$ tipindeki A matrisinin singüler olmaması için gerek ve yeter şart A'nın sütun vektörlerinin $\mathbb{R}^n$ de bir baz oluşturmasıdır.

$N(A)$: A'nın sıfır uzayı. ($Ax=0$ çözümleri)

A'nın sıfır uzayının boyutuna A'nın <u>sıfırlığı</u> denir.

Teorem: (Rank ve sıfırlık teoremi) Eğer A $m\times n$ tipinde bir matris ise A'nın rankı ile A'nın sıfırlığının toplamı n'ye eşittir.

Örk: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$ 3×4

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\{[1\ 2\ -1\ 1], [0\ 0\ -1\ -2]\}$ satır uzayının bir bazıdır. A'nın rankı 2'dir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$-x_3-2x_4=0 \Rightarrow x_4=\alpha$, $x_3=-2\alpha$

$x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \Rightarrow x_2=\beta$, $x_1=-3\alpha-2\beta$

$$N(A)=\left\{\begin{bmatrix}-3\alpha-2\beta\\ \beta\\ -2\alpha\\ \alpha\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}-3\alpha-2\beta\\ \beta\\ -2\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -2\\ 1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$N(A)$'nın boyutu $=$ A'nın sıfırlığı 2 dir.

Teorem: Eğer A $m\times n$ tipinde bir matris ise A'nın satır uzayının boyutu A'nın sütun uzayının boyutuna eşittir.

Örk: $x_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$, $x_2=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$, $x_3=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$, $x_4=\begin{bmatrix}3\\ 8\\ -5\\ 4\end{bmatrix}$

tarafından gerilen $\mathbb{R}^4$'ün alt uzayının boyutunu bulunuz.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 4 & 8\\ -1 & -3 & -2 & -5\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\{[1\ 2\ 2\ 3], [0\ 1\ 0\ 2]\}$

rank $A=2$ dir.

alt uzayın boyutu 2 dir.